

COMMENT DETERMINER L'ALTITUDE D'UNE MONTAGNE ?



FAVRE François-Xavier

NEAU Arthur

PERNET Dimitri

PINGET Lucas

RÉSUMÉ

L'an dernier, nous avons participé au projet Mont-Blanc 2010, avec une dizaine d'autres élèves du lycée. Notre but était de gravir le Mont-Blanc mais aussi d'aller sur les traces d'Horace-Bénédict de Saussure (1740-1799) et de reproduire certaines de ses expériences. Nous nous sommes penchés sur le problème de la détermination de l'altitude d'une montagne, d'abord pour le Môle puis pour le Mont-Blanc. Pour la méthode géodésique, nous avons été aidé par un géomètre et pour pouvoir effectuer notre calcul, nous avons dû mesurer une distance et onze angles ! Pour la méthode barométrique, nous avons d'abord vérifié les lois pour des points d'altitude connue (le long d'une route), puis déterminé l'altitude du Môle et du Mont-Blanc en escaladant ces deux montagnes.

Nous avons appris que déterminer l'altitude d'une montagne n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser. Il y a toujours un grand nombre de choses à prendre en considération et de nombreuses corrections à faire sur les mesures.

INTRODUCTION

Pendant l'année scolaire 2009/10, nous avons fait parti du projet Mont-Blanc 2010, avec une dizaine d'autres élèves du lycée. A l'initiative d'un professeur de sport (M. Laurent Beaudet) et d'un professeur de sciences physiques (M. Vincent Deparis) et avec l'aide et l'encadrement du Club Alpin Français d'Annemasse, nous nous sommes entraînés toute l'année pour réaliser l'ascension du Mont-Blanc début juillet. Notre but était bien sûr d'atteindre le plus haut sommet de l'Europe mais aussi d'aller sur les traces d'Horace-Bénédict de Saussure (1740-1799) et de reproduire certaines de ses expériences. Ce scientifique a atteint le sommet du Mont-Blanc le 3 août 1787, un an après la première ascension de Gabriel Paccard et Jacques Balmat. C'était un scientifique d'une très grande curiosité. Pendant les quatre heures et demie qu'il passa au sommet (nous sommes à peine restés une demie-heure !), il a réalisé de très nombreuses expériences : détermination de l'altitude par des mesures barométriques, mesures de la température d'ébullition de l'eau, de l'hygrométrie de l'air et détection de la présence du CO₂ atmosphérique.

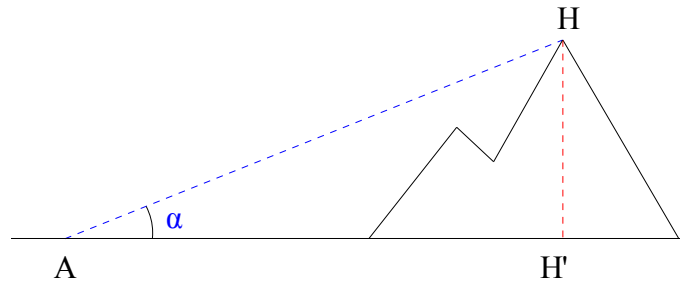
Alors que d'autres élèves se sont intéressés à la mesure de la température d'ébullition de l'eau en fonction de l'altitude, nous nous sommes penchés sur le problème de la détermination de l'altitude d'une montagne. Ce problème a d'abord constitué notre sujet de TPE, que nous avons développé ensuite. L'altitude d'un point est la hauteur verticale de ce point au dessus d'une surface de référence. Dans notre étude, nous n'avons jamais déterminé des altitudes mais des différences de hauteurs entre un point d'altitude inconnue et un point d'altitude connue.

Nous avons utilisé deux méthodes, même si c'est uniquement la seconde que de Saussure a employé : la méthode géodésique et la méthode barométrique. Pour la méthode géodésique, il n'est pas nécessaire d'aller au sommet. Il faut connaître au minimum deux angles et une distance et utiliser des relations trigonométriques. Pour la méthode barométrique, il est nécessaire de réaliser l'ascension du sommet. Il faut connaître la pression et la température de l'air en haut et en bas de la montagne et la loi pour passer de la différence de pression à la différence de hauteur. Nous avons commencé par déterminer l'altitude du Môle, une montagne à proximité du lycée, avant de déterminer l'altitude du Mont-Blanc.

A) HAUTEUR D'UNE MONTAGNE PAR TRIANGULATION GEODESIQUE

1) La méthode utilisée : les visées

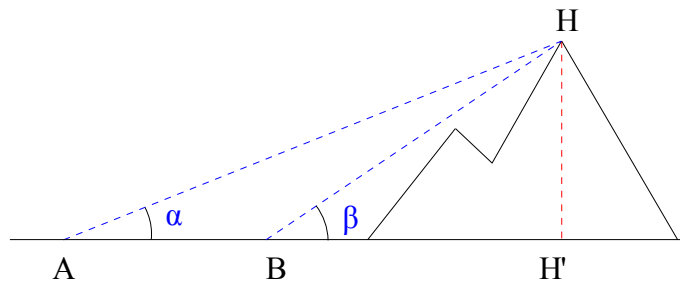
1) Première idée



Pour déterminer la hauteur HH' d'une montagne, on mesure l'angle α . On calcule HH' :
 $HH' = \tan \alpha \times AH'$ ou $HH' = \sin \alpha \times AH$. On est bloqué car on ne connaît pas la distance AH' , ni la distance AH .

2) Deuxième idée

On vise le sommet depuis ces deux points A et B de la plaine, dont on a mesuré leur éloignement AB. A et B sont à la même altitude et sont alignés avec le sommet.



On connaît AB. Les formules trigonométriques nous permettent de calculer AH :

$$AH = \frac{AB \times \sin(\pi - \beta)}{\sin(\alpha + \pi - \beta)} = \frac{AB \times \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

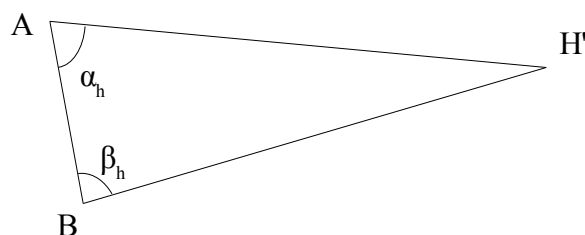
On a trouvé AH, on peut calculer HH' : $HH' = \sin \alpha AH$.

Problème : sur le terrain, il est difficile de trouver deux points à la même altitude et alignés avec le sommet.

3) Troisième idée

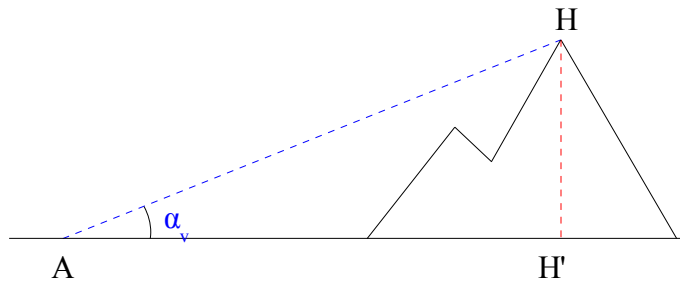
On connaît la distance AB entre deux points de la plaine et on vise toujours le sommet depuis ces deux points. Mais cette fois A et B ne sont plus alignés avec le sommet. On fait deux mesures successives : d'abord dans le plan horizontal, puis dans le plan vertical.

Dans le plan horizontal :



On connaît AB, on mesure α_h et β_h . On peut calculer AH' : $AH' = \frac{AB \times \sin(\beta_h)}{\sin(\alpha_h + \beta_h)}$

Dans le plan vertical :



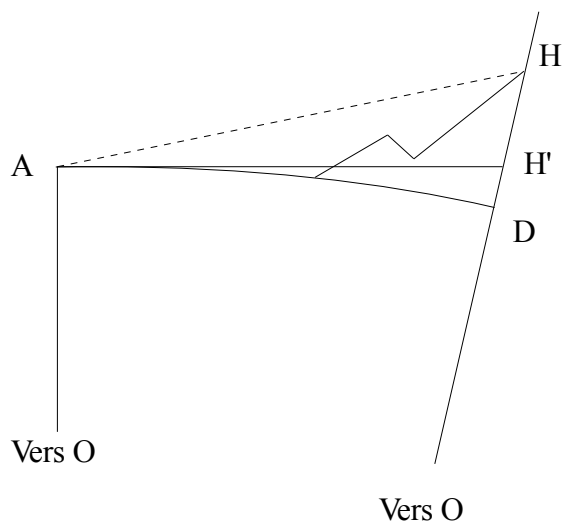
On connaît AH'. On peut calculer HH' : $HH' = \tan \alpha_v \times AH'$

II) Les corrections :

Les visées ne suffisent pas. Il faut tenir compte de deux choses : la Terre n'est pas plate et les rayons lumineux ne se propagent pas en ligne droite.

1) Correction Cs due à la sphéricité de la Terre :

La Terre est ronde ! Lorsque l'on détermine la hauteur d'une montagne par rapport à un plan horizontal passant par la station de visée, on effectue une erreur.



La figure est exagérée. Nous, nous supposons que le triangle AH'H est toujours rectangle en H'.

Altitude du point H = DH

Quand on fait une visée, on calcule la distance H'H. Mais l'altitude de la montagne est la distance DH. Il faut déterminer $DH' = Cs$ (correction de sphéricité)

Dans le triangle OAH', on a :

$$OA^2 + AH'^2 = H'O^2$$

$$R_T^2 + AH'^2 = (H'D + DO)^2 \quad \text{Or } DO = R_T$$

$$R_T^2 + AH'^2 = H'D^2 + 2H'D \times R_T + R_T^2 \quad \text{On simplifie par } R_T^2$$

$$AH'^2 = H'D^2 + 2H'D \times R_T \quad \leftarrow \text{équation du second degré}$$

En physique, nous pouvons supprimer le terme $H'D^2$. C'est le carré d'une petite distance; il

est négligeable. Cela simplifie l'équation du second degré en une équation du premier degré :

$$AH'^2 = 2H'D \times R_T \quad \text{donc} \quad C_s = H'D = \frac{AH'^2}{2R_T}$$

Première méthode pour vérifier que l'on peut bien négliger H'D² :

$$\text{si } AH' = 5000 \text{ m alors } H'D = \frac{AH'^2}{2R_T} = \frac{5000^2}{(2 \times 6378000)} = 1,96 \text{ m}$$

$H'D^2 = 3,8 \text{ m}^2$ et $AH'^2 = 2,5 \times 10^7 \text{ m}^2$ Nous pouvons constater que H'D² est bien très petit devant AH².

Deuxième méthode :

Nous résolvons l'équation du second degré, avant la simplification :
 $AH' = H'D^2 + 2H'D \times R_T$

$$\text{En posant } H'D = x, \text{ on a : } x^2 + 2R_T x - AH'^2 = 0 \text{ soit } x^2 + 1,2756 \cdot 10^7 - 2,5 \cdot 10^7 = 0$$

Cette équation est une équation du second degré :

$\Delta = b^2 - 4ac$ donc $\Delta = (1,2756 \cdot 10^7)^2 + 4 \times 2,5 \cdot 10^7 = 1,62715636 \times 10^{14}$ Il faut prendre tous ces chiffres significatifs pour que ça marche. $\Delta > 0$ Donc :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1,2756 \cdot 10^7 - \sqrt{1,62715636 \cdot 10^{14}}}{2} = -1,28 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1,2756 \cdot 10^7 + \sqrt{1,62715636 \cdot 10^{14}}}{2} = 1,96 \text{ m}$$

On retrouve bien exactement le même résultat, il n'est donc pas nécessaire de s'embêter avec l'équation du second degré, puisque l'équation du premier degré suffit.

La correction due à la sphéricité de la terre est donc égale à : $C_s = H'D = \frac{AH'^2}{2R_T}$

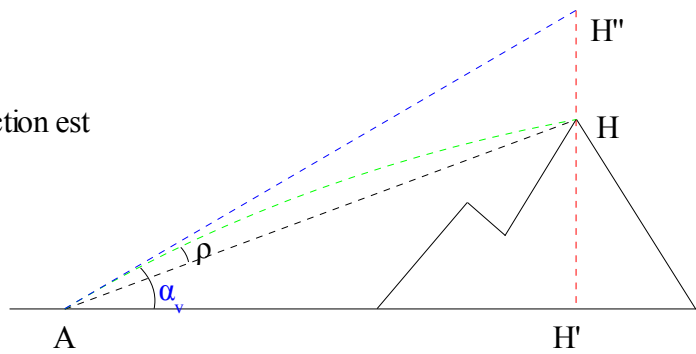
Quelques exemples :

si AH' = 500 m,	$C_s = 1,96 \text{ cm}$;
si AH' = 5 km,	$C_s = 1,96 \text{ m}$
si AH' = 10 km,	$C_s = 7,8 \text{ m}$.

2) Correction Cr due à la réfraction atmosphérique :

Lors de la visée d'un sommet, le rayon lumineux n'est pas une ligne droite mais une ligne courbe. La courbure de cette trajectoire n'est jamais la même, elle varie tous les jours mais aussi toutes les heures de la journée. La position apparente du sommet que l'on vise change donc à chaque instant suivant l'état de l'atmosphère. Ces phénomènes proviennent de la réfraction atmosphérique.

L'angle de réfraction est appelé ρ



Lorsqu'on vise un sommet, on mesure l'angle α_v à cause de la réfraction atmosphérique. Le sommet H de la montagne semble être en H'' et l'altitude de la montagne est surestimée. **les objets paraissent donc plus grands qu'ils ne sont en réalité.** La correction C_r est égale à HH'' . Elle est négative.

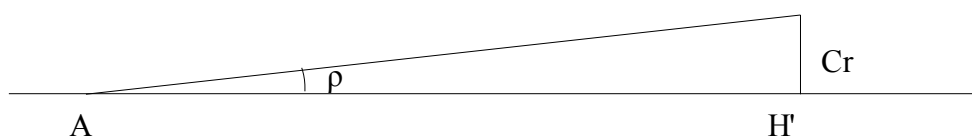
Constatations expérimentales : (d'après Levallois)

Les observations géodésiques montrent que l'angle de réfraction ρ présente un certain nombre de caractéristiques. Il est maximum la nuit, décroît au lever du jour, atteint un minimum vers 10h solaire (en été), reste plus au moins constant jusqu'à 15h solaire, et recroît ensuite. La valeur de l'angle minimum est assez régulière en été : elle se reproduit à peu près identique à elle-même les jours où les conditions météorologiques sont semblables.

On constate également que l'angle de réfraction ρ observé pendant le temps du minimum de réfraction est sensiblement proportionnel à la longueur du côté mesuré divisé par le rayon de la Terre : $\rho = K \times \frac{AH'}{R_T}$ avec $K \approx 0,065$ et ρ en radians.

Correction due à la réfraction C_r :

Pour estimer la correction C_r , on s'aide du schéma suivant :



On a : $\tan \rho = \frac{C_r}{AH'}$ Comme ρ est petit : $\rho \approx \tan \rho$ avec ρ en radians.

donc $C_r = \rho \times AH' = K \times \frac{AH'^2}{R_T}$

Si on compare C_r et C_s , on obtient : $\frac{C_r}{C_s} = \frac{K \times \frac{AH'^2}{R_T}}{\frac{AH'^2}{2R_T}} = 2K \approx \frac{1}{8}$ donc $C_r = \frac{C_s}{8}$

C_r est 8 fois plus petite que C_s . Elle est aussi de signe opposé. Cette valeur n'est qu'une estimation. Elle s'approche le plus de la réalité les jours d'été lorsque la visée a été effectuée entre

10h et 15h solaire.

III) Mesure de l'altitude du Môle :

1) Compte rendu des mesures

Nous avons appliqué la méthode géodésique à la détermination de l'altitude du Môle. Nous avons choisi cette montagne parce qu'elle est à côté du lycée et surtout parce qu'il y a une croix à son sommet que l'on a pu viser facilement. La réalisation des mesures n'a été possible que grâce à M. Gilbert Meynet, un topographe de métier, qui a passé une journée avec nous. Son appareil est un tachéomètre, qui permet des mesures de distance (de l'ordre de 300 m) et des mesures d'angles à travers une lunette qui agrandit 30 fois.

Voici le lieu d'où nous avons effectué notre première mesure (Fessy 1). Nous sommes placés au dessus de la borne géodésique car nous avons besoin de connaître une altitude de référence. Nous faisons la rencontre du géomètre et il nous présente les appareils de mesures.



Lucas vise le Môle depuis St Laurent. Depuis le même point, nous avons aussi visé Fessy 1 et Fessy 2.

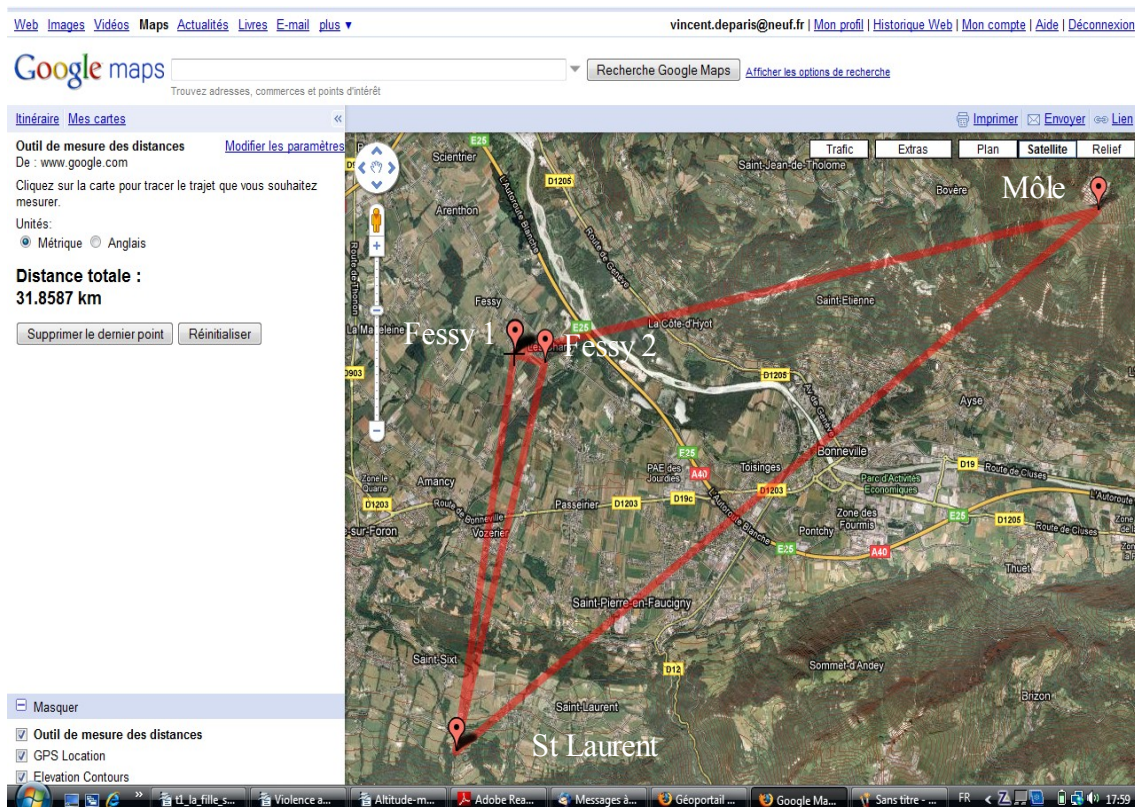


Voici le tachéomètre, l'appareil qui nous a permis de mesurer les angles nécessaires pour nos calculs ainsi que la distance entre Fessy 1 et Fessy 2.

Mesure de la distance séparant Fessy 1 de Fessy 2. Pour cela, nous tenons un prisme qui sert de réflecteur pour la visée. Le tachéomètre situé sur l'autre point envoie un faisceau infra-rouge, qui se réfléchit sur le prisme. Le temps de parcours aller-retour permet de connaître la distance puisque la vitesse du faisceau est celle de la lumière, qui est connue.



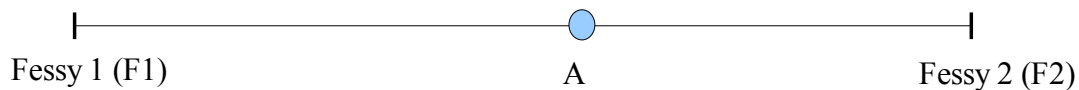
Nos mesures se déroulent dans la vallée de l'Arve, entre Fessy, près d'Arenthon et Saint Laurent. Les stations sont visibles entre elles et permettent de viser le Môle. La station Fessy1 est une borne géodésique de l'IGN, d'altitude parfaitement connue, qui est notre référence des altitudes (445,4 m).



2) Mesure de la base de départ F_1F_2

Grâce au théodolite et au prisme, nous avons pu calculer la distance qu'il y avait entre Fessy 1 et Fessy 2. Le tachéomètre ne pouvait pas mesurer une distance supérieure à 300m, ce qui nous semblait trop court comme base de départ. Pour agrandir cette distance, nous avons procédé en deux

fois, en faisant intervenir un point intermédiaire A, situé à peu près au milieu des deux points de F1F2. Depuis ce point A, nous avons visé Fessy1 et Fessy2, ce qui nous a permis de connaître la distance Fessy1-Fessy2 et l'altitude de Fessy 2 (qui n'a pas besoin d'être la même que celle de Fessy 1).

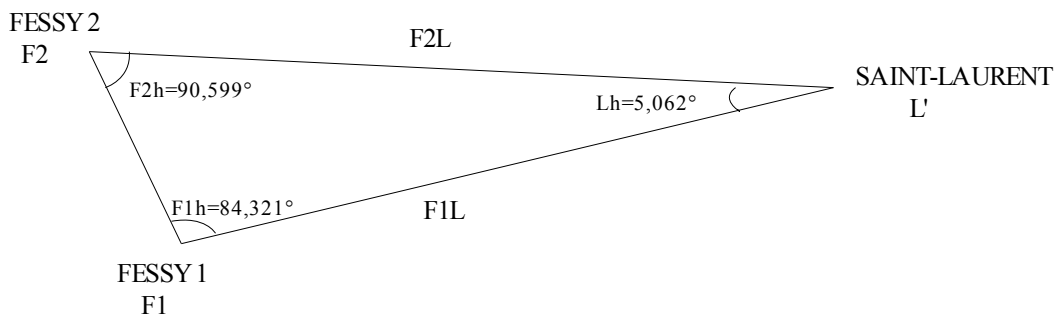


Distance A-Fessy1 : 266,304 m	Distance A-Fessy2 : 200,448 m
Hauteur Fessy1 par rapport à A : +4,524 m	Hauteur Fessy2 par rapport à A : +2,650 m
Distance Fessy1-Fessy 2 : 466,752 m	
Hauteur Fessy2 par rapport à Fessy1 : - 1,874 m	
Donc l'altitude de Fessy2 est : 445,4 – 1,874 = 443,5 m	

3) Première triangulation

Une base de 440 mètres n'est pas une base suffisante pour déterminer l'altitude du Môle. En effet pour réduire l'effet des erreurs de mesures sur le résultat final, il faut que les côtés du triangle de la triangulation soient à peu près les mêmes (Voir Annexe A). On va donc réaliser deux triangulations successives : la première a pour but de remplacer cette petite distance F_1F_2 par une grande distance ; la deuxième s'appuie sur cette nouvelle base F_1L' , plus grande, et a pour but de déterminer l'altitude du Môle.

a) Dans le plan horizontal



La distance F_1F_2 est connue grâce à nos premières mesures : 466,752m

• Distance Fessy 1/ St Laurent

$$F_1L = \frac{\text{dist } F_1F_2 \times \sin(F_2h)}{\sin(F_1h + F_2h)} \quad \text{donc} \quad F_1L = \frac{466,752 \times \sin(90,599)}{\sin(84,321 + 90,599)} = 5270,9 \text{ m}$$

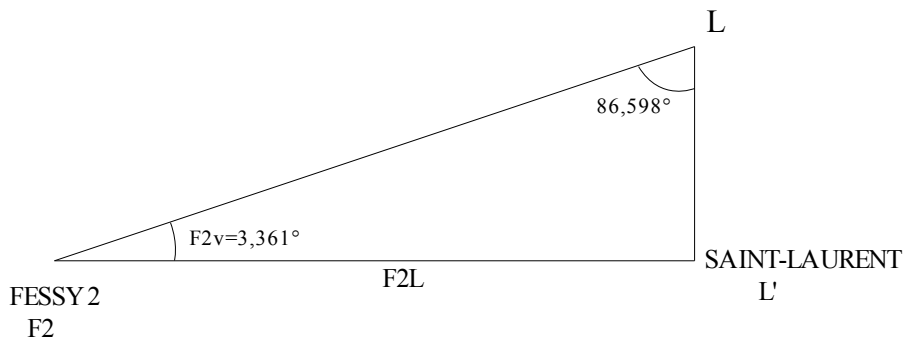
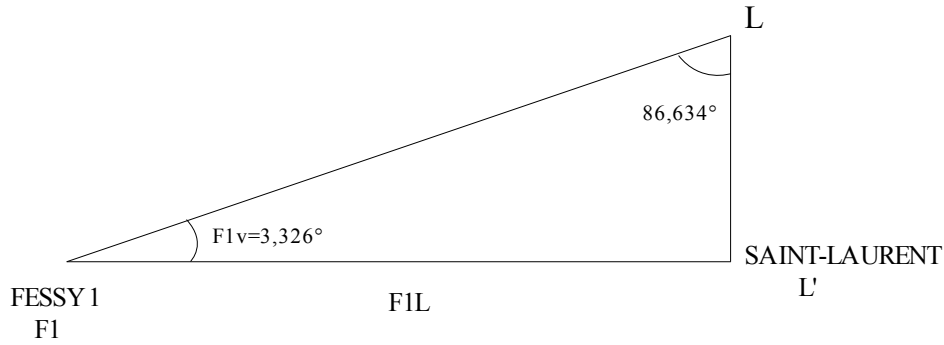
• Distance Fessy2/St Laurent

$$F_2L = \frac{F_1F_2 \times \sin(F_1h)}{\sin(F_1h + F_2h)} \quad \text{donc} \quad F_2L = \frac{466,752 \times \sin(84,321)}{\sin(84,321 + 90,599)} = 5245,38 \text{ m}$$

b) Dans le plan vertical : Calcul de l'altitude de St Laurent (LL')

Nous déterminons l'altitude de Saint-Laurent pour pouvoir déterminer l'altitude du Môle à

partir de deux points : à partir de Fessy1 mais aussi à partir de Saint-Laurent.



altitude de Fessy1 (F_1) = 445,4 m

$$LL' = F_1 L \times \tan F_1 v$$

$$LL' = 5270,9 \times \tan(3,326) = 306,3 \text{ m}$$

$$306,3 + 445,4 = 751,7 \text{ m} + 2,18 - 0,27$$

$$LL' = 753,61 \text{ m}$$

$$C_s = \frac{(F_1 L)^2}{2RT} = \frac{(5270,9)^2}{(2 \times 6371000)} = 2,18 \text{ m}$$

$$C_r = \frac{C_s}{8} = \frac{2,18}{8} = 0,27 \text{ m}$$

altitude de Fessy2 (F_2) = 443,5 m

$$LL' = F_2 L \times \tan F_2 v$$

$$LL' = 5245,38 \times \tan(3,360) = 308,05 \text{ m}$$

$$308,05 + 443,5 = 751,53 \text{ m} + 2,16 - 0,27$$

$$LL' = 753,96$$

$$C_s = \frac{(F_2 L)^2}{2RT} = \frac{(5245,38)^2}{(2 \times 6371000)} = 2,16 \text{ m}$$

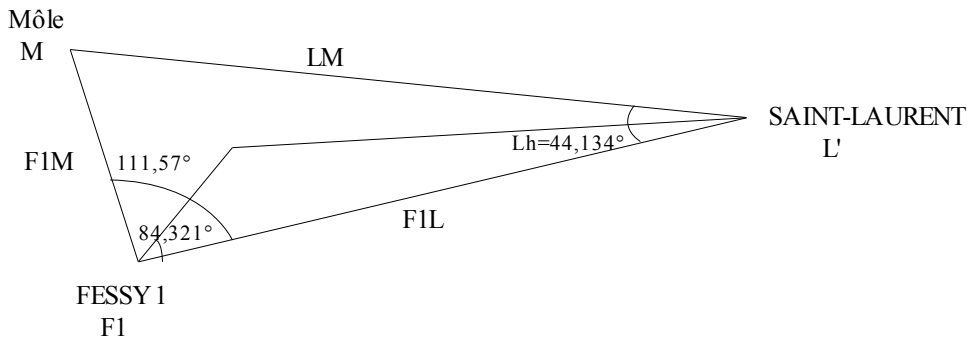
$$C_r = \frac{C_s}{8} = \frac{2,16}{8} = 0,27 \text{ m}$$

$$\text{Altitude de Saint-Laurent : } \left. \begin{array}{l} 753,61 \text{ m} \\ 753,96 \text{ m} \end{array} \right\} \text{ moyenne } 753,785 \text{ m}$$

4) Deuxième triangulation

Nous visons maintenant le Môle depuis la base agrandi Fessy1-Saint-Laurent. Le but est de déterminer l'altitude du Môle.

a) Dans le plan horizontal



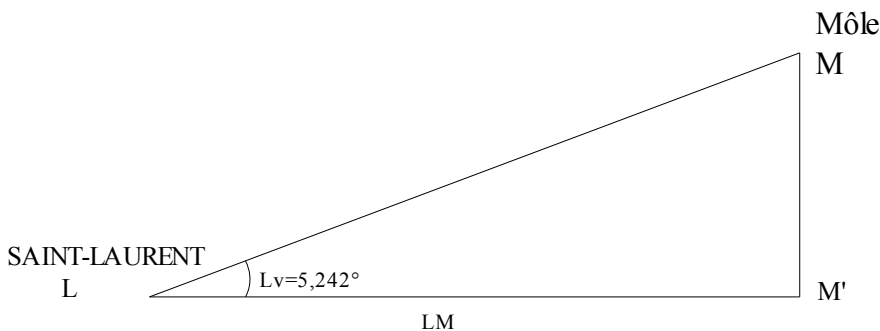
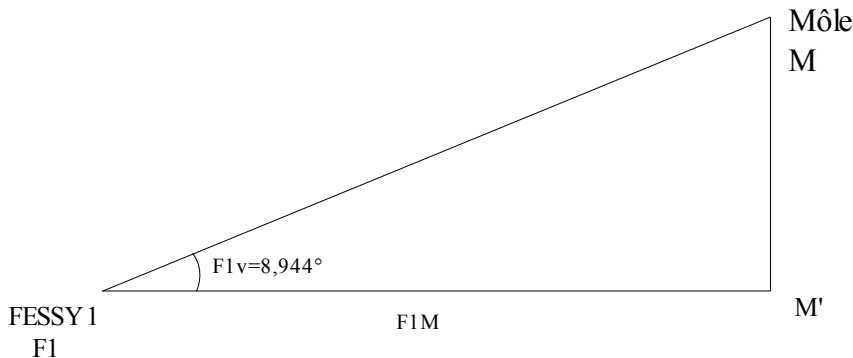
- Calcul distance Fessy1 le Môle (F₁M).

$$F_1M = \frac{F_1L \times \sin(Lh)}{\sin(Lh + F_1'h)} \quad \text{donc} \quad F_1M = \frac{5270,9 \times \sin(44,134)}{\sin(44,134 + 111,57)} = 8920,45 \text{ m}$$

- Calcul distance le Môle St Laurent (LM)

$$LM = \frac{F_1L \times \sin(F_1'h)}{\sin(Lh + F_1'h)} \quad \text{donc} \quad LM = \frac{5270,9 \times \sin(111,57)}{\sin(111,57 + 44,134)} = 11913,39 \text{ m}$$

b) Dans le plan vertical : Calcul final de l'altitude du Môle



Pour calculer l'altitude du Môle, il faut ajouter une nouvelle correction : la hauteur du tachéomètre. Cela n'intervenait pas avant, car les visées étaient effectuées par rapport au prisme, qui était réglé à la même hauteur que le tachéomètre. Pour le Môle, nous ne visons plus le prisme mais la croix à son sommet. A Fessy1, le tachéomètre était à une hauteur de 1,355m et à Saint-Laurent, il était à 1,26m. Il faut donc ajouter ces valeurs au résultat final.

$$MM' = F_1 M \times \tan(F_1 v) + \text{alti Fessyl}$$

$$MM' = 8920,45 \times \tan(80944) + 445,4$$

$$MM' = 1849,3 \text{ m}$$

Avec les corrections :

$$MM' = 1849,3 + 6,25 - 0,78 + 1,355 = 1856,2 \text{ m}$$

$$C_s = \frac{FIM^2}{2RT} = \frac{8920,45^2}{(2 \times 6371000)} = 6,25 \text{ m}$$

$$C_r = \frac{C_s}{8} = \frac{6,25}{8} = 0,78 \text{ m}$$

$$MM' = LM \times \tan(Lv) + \text{alti St Laurent}$$

$$MM' = 11913,39 \times \tan(5,242) + 753,785$$

$$MM' = 1846,8 \text{ m}$$

Avec les corrections :

$$MM' = 1846,8 + 11,14 - 1,39 + 1,26 = 1857,8 \text{ m}$$

$$C_s = \frac{LM^2}{2RT} = \frac{11913,39^2}{(2 \times 6371000)} = 11,14 \text{ m}$$

$$C_r = \frac{C_s}{8} = \frac{11,14}{8} = 1,39$$

La moyenne de l'altitude du Môle est donc de 1857 m. L'altitude réelle du Môle est de 1863m. Lors de nos mesures, nous avons visé le milieu de la croix, situé quelques mètres en contrebas du sommet (2 ou 3m), donc à une altitude de 1860 m. Notre erreur brute est donc de 3m.

5) Récapitulatif des calculs

Altitude de l'IGN	
Fessy 1	445,4
Fessy 2	443,5
Saint Laurent	753,2
Môle	1860

Première triangulation

Plan	Mesures		Calcul	
horizontal	F2h (°)	90,599	F2L (m)	5245,39
	F1h (°)	84,321	F1L (m)	5270,97
	F1F2 (m)	466,752		

Plan vertical	Mesures		Calcul		Cs	Cr	Altitude St L	Erreur
	F2v (°)	3,361	hLF2 (m)	308,05	2,160	0,27	753,44	0,24
	F1v (°)	3,326	hLF1 (m)	306,32	2,180	0,27	753,63	0,43

Deuxième triangulation

Plan	Mesures		Calcul	
horizontal	F'1h (°)	111,570	F1M (m)	8920,58
	L'h (°)	44,134	LM (m)	11913,55
	F1L (m)	5270,97		

Plan vertical	Mesures		Calcul		Cs	Cr	Appareil	Altitude Môle	Erreur
	F'1v (°)	8,944	hMF1 (m)	1849,35	6,25	0,78	1,355	1856,17	3,83
	L'v (°)	5,242	hML (m)	1846,22	11,14	1,39	1,26	1857,23	2,77

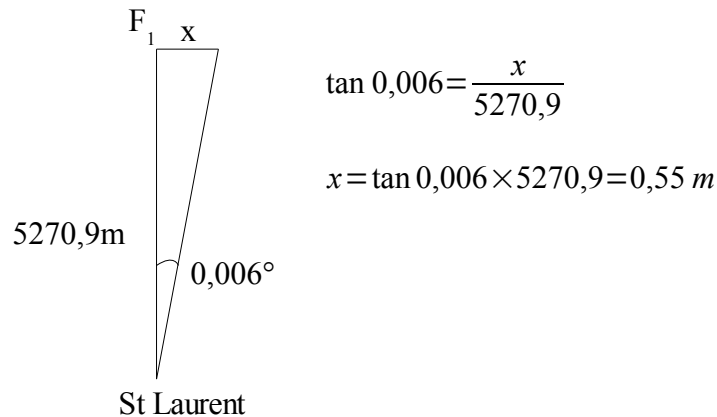
6) Les erreurs

a) Quelle erreur sur les angles mesurés ?

Lors de la première triangulation, dans le plan horizontal, nous avons mesuré les trois angles d'un triangle : $F_{1h} + F_{2h} + L_h = 84,321 + 90,599 + 5,062 = 179,982^\circ$

Sur les trois mesures, l'erreur commise est donc de $180 - 179,982 = 0,018^\circ$. Ce qui fait en moyenne une erreur de $0,018/3 = 0,006^\circ$ sur chaque angle.

Par exemple, lors de la visée de St Laurent à Fessy1, nous étions à une distance de 5270,9m. Que représente cette erreur de $0,006^\circ$ sur l'angle ?



On voit que l'erreur de $0,006^\circ$ sur l'angle représente une erreur dans le positionnement de 0,55 m. C'est tout à fait possible car le jour de notre expérience, la visibilité n'était pas très bonne. Il aurait fallu avoir une source de lumière puissante pour améliorer nos visées.

b) Conséquence sur la mesure de l'altitude de Saint Laurent

Si les angles changent de $0,006^\circ$, quelles conséquences pour les calculs ?

Mesures horizontales		Mesures verticales		Calcul	
F2h (°)	90,599	F2v (°)	3,361	F1L (m)	5270,97
F1h (°)	84,321	F1v (°)	3,326	Altitude St L	753,63
F1F2 (m)	466,752				

	F1h varie +0,006°	F2h varie +0,006°	F1v varie +0,006°
Calcul F1L	5277,19	5277,18	5270,97
Variation F1L	6,22	6,21	0
Calcul h(St L)	753,99	753,99	754,18
Variation h(St L)	0,37	0,37	0,55

D'après nos calculs, nous pouvons dire que l'altitude de St Laurent est connue à un mètre près.

c) Conséquence sur la mesure de l'altitude du Môle

Mesures horizontales		Mesures verticales		Calcul	
F'1h (°)	111,569	F'1v (°)	8,944	F1M (m)	8920,24
L'h (°)	44,134	L'v (°)	5,242	Altitude Môle	1856,11
F1L (m)	5270,97				

	F'1h varie +0,006°	L'h varie +0,006°	F'1v varie +0,006°	F1L varie +6m
Calcul F1M	8922,31	8923,27	8920,24	8930,39
Variation F1M	2,07	3,03	0	10,15
Calcul h(Môle)	1856,43	1856,59	1857,06	1857,72
Variation h(Môle)	0,33	0,48	0,96	1,61

La variation de F1L = +6m provient de ce qu'on a trouvé dans le paragraphe précédent.

Variation de la hauteur du Môle : $0,33+0,48+0,96+1,61 = 3,38\text{m}$

Lorsque nous prenons en compte les erreurs de mesures d'angles, l'altitude du Môle est connue à trois mètres près.

La formule de la correction de la réfraction (C_r) est la plus juste lorsqu'on effectue des visées l'été entre 10h et 15h solaire. Or, nous avons effectué nos mesures au mois de novembre. Nos calculs de C_r ne sont donc sans doute pas exacts.

B) HAUTEUR D'UNE MONTAGNE PAR MESURE BAROMETRIQUE

Dans cette partie, nous allons déterminer l'altitude du Môle grâce à la pression atmosphérique. Nous allons tout d'abord faire différentes mesures de pression à des altitudes connues afin de vérifier les formules que nous allons utiliser. Ensuite, nous réaliserons des mesures au pied et au sommet du Môle afin de déterminer son altitude, puis au pied et au sommet du Mont-Blanc. Nous comparerons notre détermination avec celle de de Saussure.

1) Modèles d'atmosphère et lois de la variation de pression avec l'altitude :

1) Relation de départ

a) Variation de pression due à une variation de hauteur

La pression atmosphérique provient du poids qu'exerce l'air sur la surface Terrestre. Elle se mesure à l'aide d'un baromètre et son unité est l'hectopascal. On veut calculer de combien diminue la pression lorsqu'on passe de l'altitude h_0 à l'altitude h_1 .

On considère une colonne d'air de surface S . La pression atmosphérique p en un point de la colonne est égale au poids de la colonne d'air supérieure divisé par la surface S .

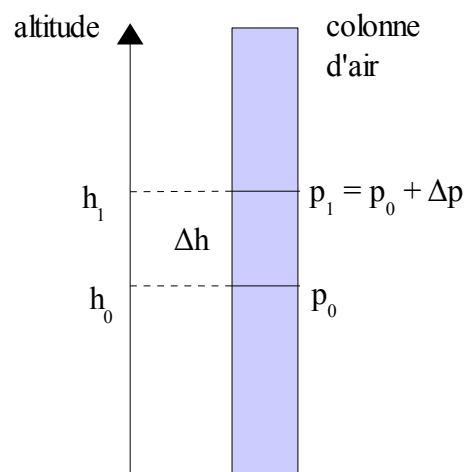
La pression p_0 est donc égale à la pression p_1 + la pression occasionnée par le poids du volume d'air compris entre les altitude h_0 et h_1 :

$p_0 = p_1 + \text{pression petit volume d'air}$ donc

$$p_0 = p_1 + \frac{mg}{S}$$

Or ρ est la masse volumique de l'air : $\rho = \frac{m}{V}$ donc $m = \rho V = \rho S \Delta h$

On a : $p_0 = p_1 + \frac{\rho \cdot S \cdot \Delta h \cdot g}{S} = p_1 + \rho g \Delta h$



La variation de pression est : $\Delta p = p_1 - p_0 = -\rho g \Delta h$

La pression baisse quand l'altitude augmente

Quand on monte, la pression baisse mais la variation de pression n'est pas la même à toutes les altitudes. Cette variation de pression dépend donc de deux facteurs :

– **de la pesanteur g** : $g = \frac{(G \times \text{Masse Terre})}{(\text{Rayon Terre} + \text{Altitude})^2}$

Lorsqu'on est au niveau de la mer: $g = \frac{(6,672 \times 10^{-11} \times 5,9742 \times 10^{24})}{(6378000)^2} = 9,799 \text{ N/Kg}$

Lorsqu'on est au Mont-Blanc: $g = \frac{(6,672 \times 10^{-11} \times 5,9742 \times 10^{24})}{(6378000 + 4800)^2} = 9,784 \text{ N/Kg}$

On voit que la pesanteur g varie très peu (0,15%) suivant l'altitude. On la supposera constante dans toute notre étude.

- **de la densité ρ de l'air** : dans la suite, nous devons donc chercher de quoi dépend la densité de l'air. Ce de ce facteur que proviennent toutes nos difficultés.

b) Composition et densité de l'air

L'air est un mélange gazeux incolore et homogène. Sa composition ne varie pas avec l'altitude, car les vents la rendent homogène dans toute l'atmosphère. L'air est approximativement composé de:

Éléments de l'air	Part en %
diazote	78,084
dioxygène	20,946
argon	0,934
dioxyde de carbone	0,033
Autres (néon, krypton, xénon, dihydrogène)	<0,007

Nous allons calculer la masse molaire de l'air, dont on aura besoin par la suite.

$$M = 0,2095 \times M(O_2) + 0,7808 \times M(N_2) + 0,0093 \times M(Ar) + 0,00033 \times M(CO_2)$$

$$M = 0,2095 \times 32 + 0,7808 \times 28 + 0,0093 \times 39,9 + 0,00033 \times 44 = 28,95 \text{ g/mol} = 0,02895 \text{ kg/mol}$$

Pour comprendre de quoi dépend la densité de l'air, on suppose que l'air se comporte comme un gaz parfait : $pV = nRT$

$p = \text{pression en pascal} ; V = \text{volume en } m^3 ; R = 80314 \text{ SI}$
 $T = \text{température en Kelvin} ; \rho = \text{masse volumique}$

n est le nombre de moles : $n = \frac{m}{M} = \frac{\rho \cdot V}{M}$ (m : masse ; M : masse molaire de l'air)

On a : $p \times V = \frac{\rho \times V}{M} \times RT$ donc $\rho = \frac{p \times M}{(R \times T)}$.

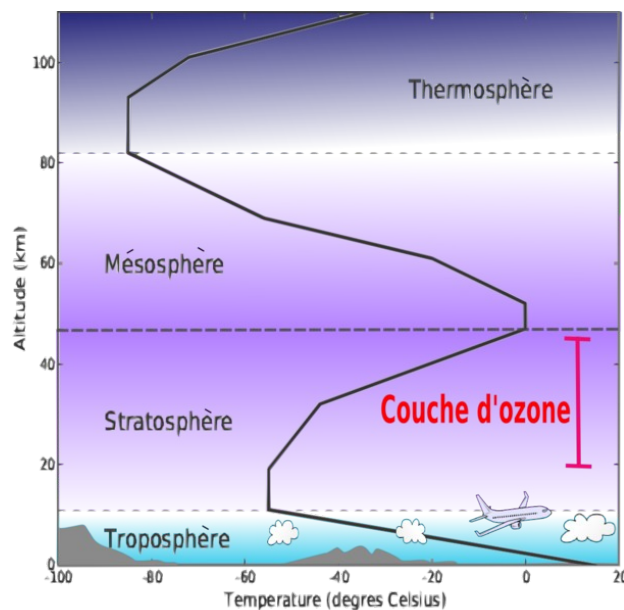
D'après cette formule, on voit que la densité de l'air dépend de trois facteurs :

- **De sa masse molaire M** : celle-ci est constante quelque soit l'altitude.
- **De la pression** : en effet, l'air est compressible. Lorsque la pression augmente, la densité augmente également. Plus on est haut, moins l'air est comprimé (car la colonne d'air s'exerçant au dessus est moins grande) donc moins la densité ρ de l'air est élevée.
- **De la température** : l'air se dilate ou se contracte en fonction de la température. Plus celle-ci est basse, plus l'air est dense.

Pour pouvoir connaître comment varie la densité de l'air avec l'altitude, il faut connaître comment varie la température avec l'altitude.

c) Variation de la température dans l'atmosphère

L'atmosphère est divisée en plusieurs couches. Dans notre TPE, seule la troposphère nous intéresse.



L'origine principale de la diminution de la température avec l'altitude dans la troposphère provient du fait que les couches basses sont chauffées par la Terre (elle même chauffée par le soleil), alors que les couches hautes perdent de la chaleur vers l'espace. Cette diminution de la température concerne l'air ambiant stable, sans mouvement.

Ce qui nous amène au gradient thermique vertical: variation de la température de l'air avec l'altitude, c'est à dire:

- sans considération d'échange de chaleur avec l'environnement (autres masses d'air, reliefs...)
- sans considération de condensation (formation de nuage) ni de précipitation
- sans considération de mouvements ascendants (Lorsqu'un paquet d'air monte, sa pression diminue et donc sa température baisse : loi des gaz parfait)

Ce gradient a comme valeur 0,65 K pour 100 m en moyenne soit 0,0065 K/m. On l'exprime par : $\Delta T = \frac{T_0 - T_1}{\Delta h}$.

Lorsqu'on monte en altitude, la température diminue. On fait $T_0 - T_1$ pour avoir un ΔT est positif. Si on connaît ΔT , on peut déterminer la température T_1 à l'altitude h_1 lorsqu'on connaît la température T_0 à l'altitude h_0 : $\Delta T \times \Delta h = T_0 - T_1$ donc $T_1 = T_0 - \Delta T \times \Delta h$

d) Différents modèles d'atmosphère

Dans la suite, nous utiliserons trois modèles d'atmosphère différents :

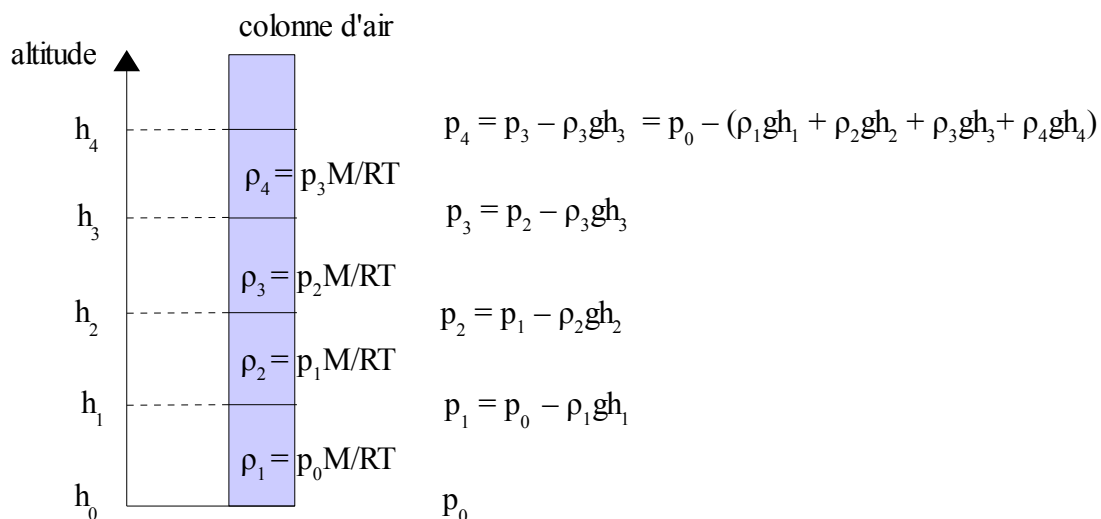
- **Modèle 1** : La densité de l'air est constante quelque soit l'altitude. Cette hypothèse est la plus simple.
- **Modèle 2** : La densité de l'air ne dépend que de la pression (la température de l'atmosphère est constante : $T_a = 15^\circ\text{C} = 288\text{ K}$).
- **Modèle 3** : La densité de l'air dépend de la pression et de la température. On suppose que la température varie linéairement, suivant une loi du type : $T(h) = T_0 - \Delta T \times (h - h_0)$ où ΔT est le gradient thermique entre les deux altitudes et T_0 la température à la station inférieure.

Nous ne prendrons jamais en compte l'humidité de l'air.

2) Lois mathématiques de la variation de pression avec l'altitude

On a vu que : $\Delta p = p_1 - p_0 = -\rho g \Delta h$ et $\rho = \frac{p \times M}{(R \times T)}$

On découpe la colonne d'air en une infinité de couches infiniment minces. Chacune de ces couches a une densité constante. On connaît p_0 . Avec les deux formules précédentes, on peut calculer de proche en proche la densité de l'air et la pression.



En mathématique, il existe un outil plus simple pour faire ce genre de calcul : l'intégration. Nous n'avons pas eu le temps d'aborder ce sujet. Nous donnons donc les formules sans les redémontrer sauf pour la première hypothèse.

a) La densité de l'atmosphère est uniforme

Si la densité de toutes les couches est la même :

$$p_4 = p_0 - (\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 + \rho_4 g h_4) = p_0 - \rho g (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

$$p_4 = p_0 - \rho h \Delta h$$

On a donc : $p = p_0 - \rho h \Delta h$

Comme il s'agit du modèle 1, on appellera p_1 les pressions calculées avec cette formule.

b) La température de l'atmosphère T_a est constante

Modèle 2 : $p_2 = p_0 e^{\left(\frac{-Mg}{RT_a} \Delta h\right)}$

c) La température de l'atmosphère décroît linéairement : $T = T_0 - \Delta T \times \Delta h$

Modèle 3 : $p_3 = p_0 \left(1 - \frac{\Delta T \times \Delta h}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{R \Delta T}}$

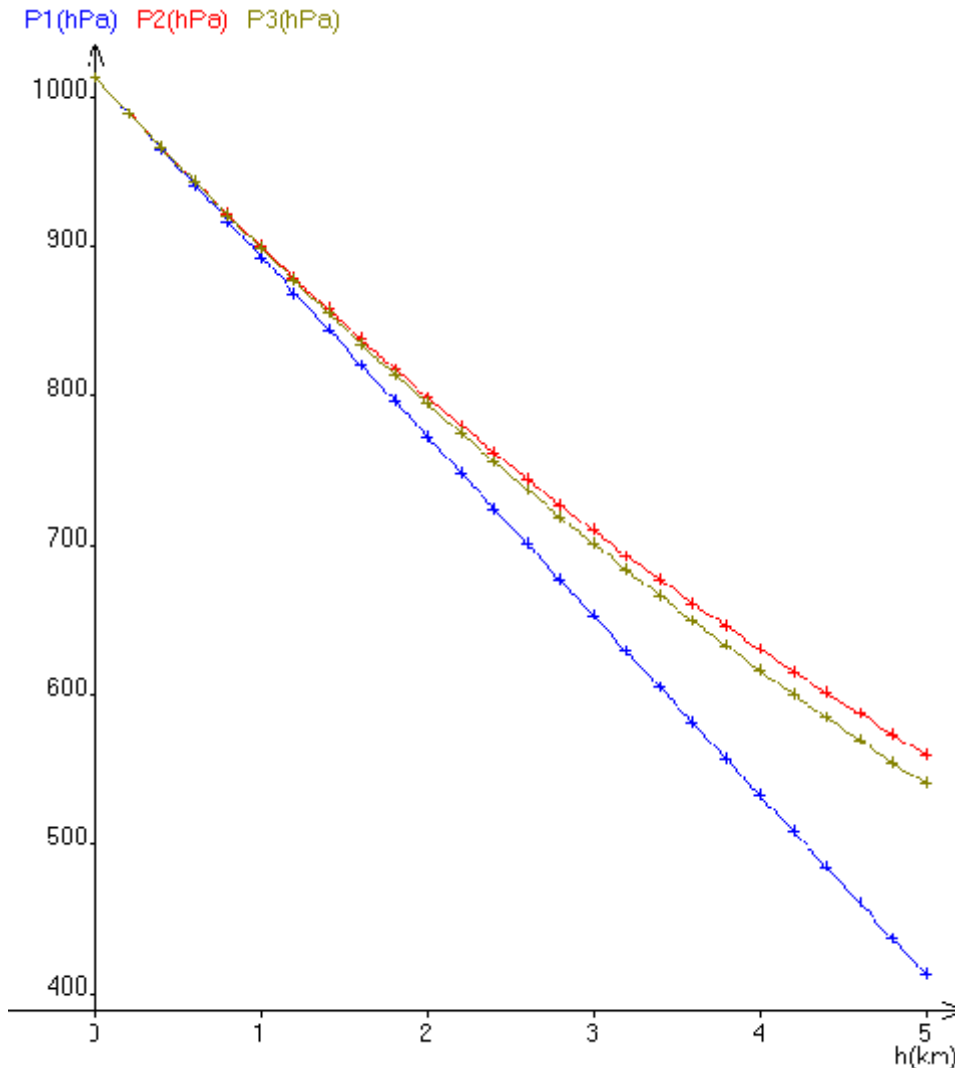
3) Application des lois précédentes dans le cas de l'atmosphère standard

a) Expression des lois

Les hypothèses	La densité de l'atmosphère est uniforme	La température de l'atmosphère est uniforme : $T_a = 15^\circ\text{C} = 288\text{K}$	La température de l'atmosphère varie linéairement: $T(h) = T_0 - \Delta T \times (h - h_0)$
Expression de la pression en fonction de l'altitude	$p_1 = p_0 - \rho g \Delta h$	$p_2 = p_0 e^{\left(\frac{-Mg}{RT_a} \Delta h\right)}$	$p_3 = p_0 \left(1 - \frac{\Delta T \times \Delta h}{T_0}\right)^{\frac{Mg}{R \Delta T}}$
Constantes utilisées	$g = 9,807 \text{ m.s}^{-2}$ $p_0 = \text{pression au niveau de la mer} = 1013 \text{ hPa} = 101300 \text{ Pa}$ $R = 8.314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ $T_0 = T_a = \text{température moyenne} = 15^\circ\text{C} = 288 \text{ K}$ $M = 0,02896 \text{ kg.mol}^{-1}$ $\Delta T = 0,006500 \text{ K/m (gradient moyen)}$		
Calcul des constantes	$\rho = \frac{p_0 M}{RT_0} = 1,225 \text{ kg/m}^3$	$\frac{RT_a}{Mg} = 8431$	$\frac{Mg}{R \Delta t} = 5,255$
Expression des données (p en hPa)	$p_1 = 1013 - \frac{12,01 \times h}{100}$	$p_2 = 1013 \times e^{\frac{-h}{8431}}$	$p_3 = 1013 (1 - 2,257 \times 10^{-5} \times h)^{5,255}$

b) Courbes p_1 , p_2 et p_3 en fonction de h et commentaires

En utilisant Régressi, nous avons pu tracer les trois courbes représentant p_1 , p_2 et p_3 .



Les trois courbes représentent trois modèles d'atmosphère possibles. La courbe p_1 décroît plus vite que p_2 et p_3 .

Pour les trois courbes, plus on monte, moins la colonne d'air est importante donc la pression diminue.

- **Modèle 1** : la décroissance identique au niveau de la mer ou au sommet du Mont-Blanc : la pression décroît proportionnellement à l'altitude.
- **Modèle 2** : Au niveau de la mer : $\Delta p_{mer2} = -\rho_{mer} g \Delta h$, au niveau du Mont-Blanc : $\Delta p_{MB2} = -\rho_{MB} g \Delta h$

L'air est compressible, sa densité dépend de la pression qui le comprime. Au sommet du Mont-Blanc, la pression est plus faible qu'au niveau de la mer donc $\rho_{MB} < \rho_{mer}$. La variation de pression $\Delta p = -\rho g \Delta h$ lorsque $\Delta h = 1$ m est donc plus faible au niveau du Mont-Blanc qu'au niveau de la mer.

On conclut que lorsqu'on monte en altitude, la diminution de pression se fait de moins en moins vite et c'est pourquoi p_2 diminue moins vite que p_1 .

- **Modèle 3** : Au niveau de la mer : $\Delta p_{mer3} = -\rho_{mer} g \Delta h$, au niveau du Mont-Blanc : $\Delta p_{MB3} = -\rho_{MB} g \Delta h$

Par rapport à la formule p_2 , on prend en compte la variation de la température. La température diminue avec l'altitude et fait donc augmenter ρ (plus la température est basse, plus un corps se contracte, donc plus ρ est grand). La pression et la température ont donc des effets

opposés. La baisse de la densité due à la baisse de la pression est donc légèrement compensée par la baisse de la température : par rapport au modèle 2, la densité du modèle 3 est légèrement plus forte, et donc la pression diminue plus rapidement : la courbe de p_3 se trouve au milieu des courbes de p_1 et p_2 .

4) Expression de la variation d'altitude en fonction de la pression

Les hypothèses	La densité de l'atmosphère est uniforme (air incompressible)	La température de l'atmosphère est uniforme : $T_0 = 15^\circ\text{C} = 288\text{ K}$ (air compressible)	La température de l'atmosphère varie linéairement : $T(h) = T_0 - \Delta T \times (h - h_0)$ avec ΔT gradient de température (air compressible)
Expression de la pression en fonction de l'altitude	$p_1 = p_0 - \rho g \Delta h$	$p_2 = p_0 e^{\frac{-Mg}{RT_0} \Delta h}$	$p_3 = p_0 \left(1 - \frac{\Delta T \times \Delta h}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{R\Delta T}}$
Expression de l'altitude en fonction de la pression	$\Delta h_1 = \frac{1}{\rho g} (p_0 - p_1)$	$\Delta h_2 = \frac{RT_0}{Mg} \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)$	$\Delta h_3 = \frac{T_0}{\Delta T} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{R\Delta T}{Mg}} \right]$

Ce sont ces expressions que nous utiliserons dans la deuxième partie ci-dessous, lorsque nous calculerons des différences d'altitude.

On démontre la formule pour le modèle 3 :

$$p_3 = p_0 \left(1 - \frac{\Delta T \times \Delta h}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{R\Delta T}} \text{ donc } \frac{p_3}{p_0} = \left(1 - \frac{\Delta T \times \Delta h}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{R\Delta T}} \text{ soit } \left(\frac{p_3}{p_0} \right)^{\frac{R\Delta T}{Mg}} = 1 - \frac{\Delta T \times \Delta h}{T_0} \text{ car}$$

si $y = x^a$ alors $y^{\frac{1}{a}} = x$. On a donc $\frac{\Delta T \times \Delta h}{T_0} = 1 - \left(\frac{p_3}{p_0} \right)^{\frac{R\Delta T}{Mg}}$ et $\Delta h = \frac{T_0}{\Delta T} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{R\Delta T}{Mg}} \right]$

II) Nos mesures :

1) Nécessité de mesures simultanées

Notre but est de relier les variations de pression à des variations d'altitude. La pression peut varier à une même altitude d'un jour à l'autre, de 3 à 4 hPa environ. Cela peut provenir du passage d'une dépression ou d'un anticyclone, l'arrivée d'un air chaud ou froid, d'un air sec ou humide, etc.

Pour s'affranchir de ces variations de pression d'origine météorologiques, nous avons toujours effectué (ou essayé d'effectuer) des mesures de pression simultanées avec des points rapprochés.

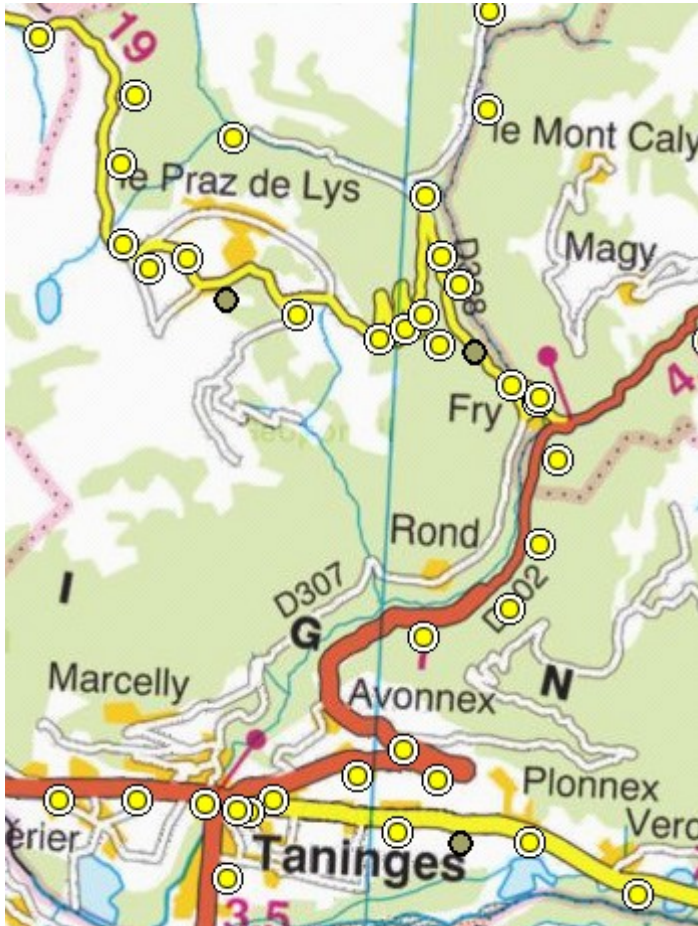
2) Vérification expérimentale des lois mathématiques précédentes

a) Lieux des mesures

Nous allons faire ces mesures afin de vérifier les différentes formules et trouver celle qui

correspond le mieux. Nous avons réalisé nos mesures sur la route de Taninges/Praz-de-Lys, car cette route a un fort dénivelé et elle possède de nombreux points géodésiques.

Pour trouver les bornes géodésiques, nous sommes allés sur le site de géoportail, où nous avons trouvé les photos des emplacements des bornes (<http://www.geoportail.fr/visu2D.do?ter=metropole>)



Tous les points jaunes de la carte sont des repères de nivellement de l'IGN, d'altitude parfaitement connue.



Repère de nivellement de l'église de Taninges : 644,532 m d'altitude (détermination plus récente que la pastille !)

Nous sommes devant une borne IGN, afin de vérifier que nos baromètres affichent tous la même pression.





FX relève la pression au niveau de la borne IGN au sommet du Praz de Lys.

b) Les mesures

Nous avons voulu faire six mesures simultanées à des altitudes différentes connues par les points IGN. Cependant, nous n'avons pas pu car les baromètres du lycée ne prenaient pas en compte l'influence de la température sur le capteur (ils n'indiquaient pas la même pression dans la voiture chauffée et à l'extérieur). Nous avons donc pris les valeurs de pression de la montre altimètre de Mr. Deparis. Celles-ci n'étaient donc plus simultanées. Cependant, les mesures n'ont pas été faussées car pendant la durée de nos mesures (environ 30 minutes) une personne a relevé la pression à l'église de Taninges, et cette pression qui n'a pas bougé. Les conditions météorologiques n'ont donc pas changé durant le temps des mesures.

c) Comparaison entre les mesures et les valeurs théoriques

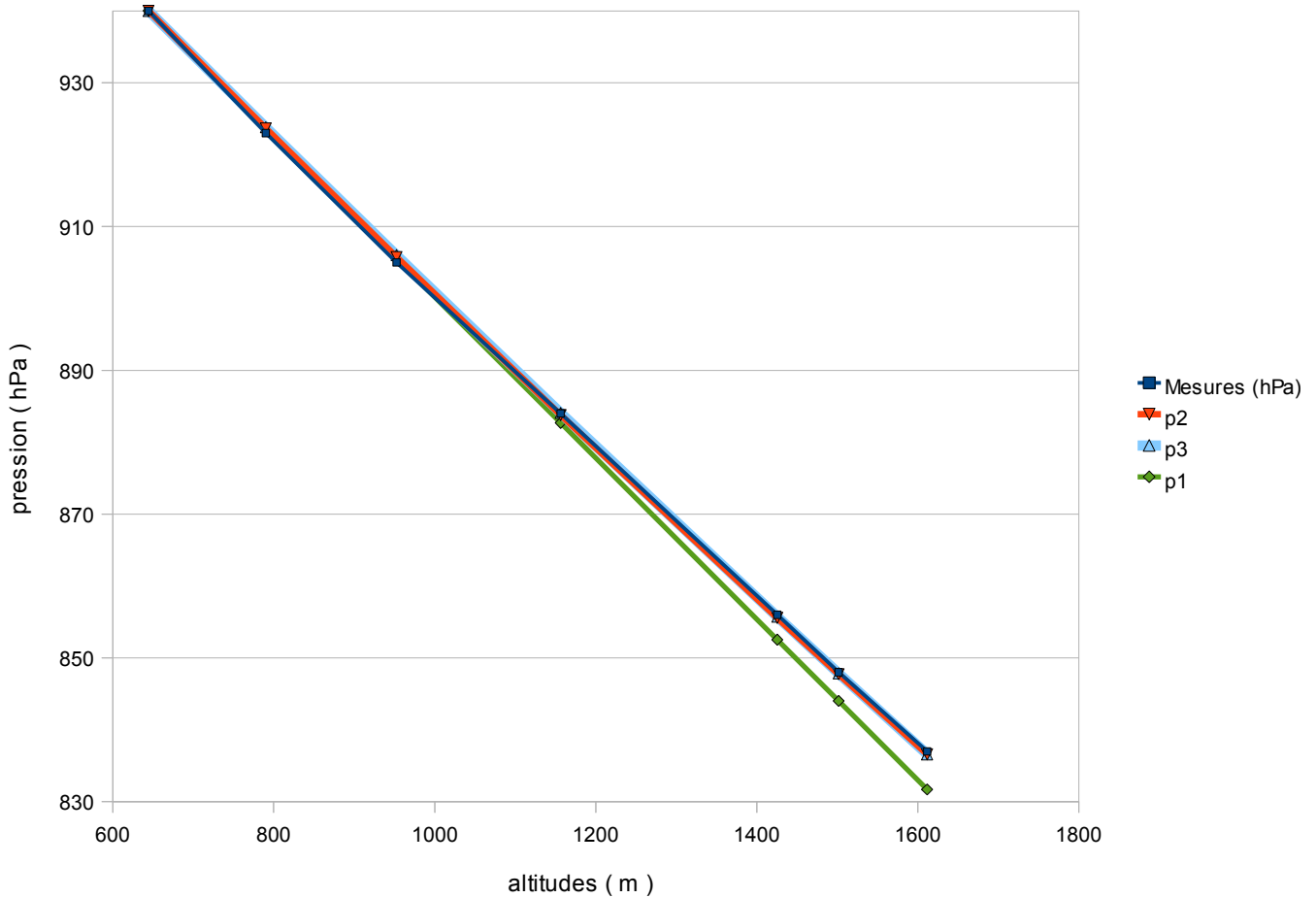
Lieux	Altitude (m)	Mesures (hPa)	p1	p2	p3
Eglise de Taninges	644,5	940	940	940	940
Sous Avonnex	790,2	923	923,7	923,6	923,8
Fry	952,5	905	905,5	905,7	906,0
Pont Bonnavaz	1156,3	884	882,7	883,8	884,1
Auberge de Jeunesse	1425,5	856	852,5	855,6	855,7
Resto Jean de la pipe	1501,7	848	844,0	847,7	847,9
Col de Sommant	1611,5	837	831,7	836,6	836,6

R	8,314	T0 (église Taninges)	13,6
M	0,02896	T1 (Col de Sommant)	7
g	9,807	Ta (température moyenne)	10,3
		ΔT	0,006825

$\rho = \frac{p_0 M}{R T_0}$	1,14	$\frac{R T_a}{M g}$	8297,59	$\frac{M g}{R \Delta T}$	5,01
------------------------------	------	---------------------	---------	--------------------------	------

Avec les formules précédentes, on calcule p_1 , p_2 et p_3 pour les altitudes de nos points de mesure, et on trace les courbes pour comparer avec nos valeurs mesurées.

Comparaison mesures expérimentales et théoriques



On peut voir que plus la pression baisse (plus on monte en altitude), plus la courbe p_1 s'éloigne des mesures. Les courbes p_2 et p_3 collent parfaitement avec les mesures et ne peuvent pas être distinguées. Pour pouvoir voir une différence entre p_2 et p_3 , il aurait fallu faire des mesures avec une différence d'altitude plus importante. Par exemple, entre Chamonix et l'Aiguille du Midi.

3) Détermination de l'altitude du Môle

a) Lieux des mesures

Le but des mesures est de calculer la différence de hauteur entre le sommet du Môle et l'église de Saint Jean de Tholome, dont l'altitude est parfaitement connue (il s'agit d'un point géodésique).

Nous avons donc réalisé l'ascension du Môle, afin d'aller mesurer la pression et la température au sommet. Une fois au sommet, nous avons téléphoné à Mr Chaffard (un second professeur de sciences physiques) afin qu'il prenne également une mesure de pression et de température à l'église.



Repère de nivellement de l'église de Saint Jean de Tholome : 804,001 m d'altitude.

C'est le lieu de la mesure de référence.

Notre groupe au sommet du Môle, prêt pour les mesures de barométrie.



b) Calcul de l'altitude selon les trois modèles

Lieux	Altitude IGN (m)	Mesures (hPa)	T(°C)
pied montagne	804	923	13
sommet montagne	1863	812	6,0

Δh vrai (m)	1059
---------------------	------

R	8,314	Ta	9,5
M	0,02896	ΔT	0,006825
g	9,807		

Calcul de Δh (en m) avec le modèle d'atmosphère 1

$\Delta h = \frac{1}{\rho g} (p_0 - p_1)$	1007,4
---	--------

Altitude sommet	1811,4
-----------------	--------

Calcul de Δh (en m) avec le modèle d'atmosphère 2

$\Delta h = \frac{RT_a}{Mg} \ln \left(\frac{p_0}{p_1} \right)$	1060,2
---	--------

Altitude sommet	1864,16
-----------------	---------

Calcul de Δh (en m) avec le modèle d'atmosphère 3

$\Delta h = \frac{T_0}{\Delta T} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{R\Delta T}{Mg}} \right]$	1059,7
--	--------

Altitude sommet	1863,67
-----------------	---------

Le modèle 1 est loin du compte. Les modèles 2 et 3 donnent des résultats similaires et très proches de la valeur réelle.

c) Sensibilité des calculs

Lieux	Altitude (m)	Mesures (hPa)	T(°C)
Eglise St Jean	804	923	13
Môle	1863	812	6,0

Δh vrai entre l'église de Saint Jean et le sommet du Môle	1059
---	------

R	8,314	Ta	9,5
M	0,02896	ΔT	0,0066100
g	9,807		

Calcul de Δh (en m) avec le modèle d'atmosphère 2

$\Delta h = \frac{RT_a}{Mg} \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right)$	1060,2
--	--------

	p ₀ varie de + 1hPa	p ₁ varie de +1hPa	p ₀ et p ₁ varient de +1hPa	T _a varie de +1°C
Calcul Δh	1069,1	1050,0	1058,9	1063,9
Variation Δh	9,0	-10,2	-1,2	3,8

Calcul de Δh (en m) avec le modèle d'atmosphère 3

$\Delta h = \frac{T_0}{\Delta T} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{R\Delta T}{Mg}} \right]$	1060,1
--	--------

	p ₀ varie de + 1hPa	p ₁ varie de +1hPa	p ₀ et p ₁ varient de +1hPa	T ₀ varie de +1°C	ΔT varie de 0,001
Calcul Δh	1068,9	1050,0	1058,9	1063,8	1058,1
Variation Δh	8,8	-10,1	-1,2	3,7	-1,98

Explication qualitative des variations de Δh :

- Lorsque p₀ augmente de 1 hPa, la variation de Δh est de +9 mètres : en effet, lorsque p₀ augmente, c'est comme si l'altitude de ce point diminuait. Donc la différence de hauteur entre les deux points augmente.
- Lorsque p₁ augmente de 1 hPa, la variation de Δh est de -10 mètres : en effet, lorsque p₁ diminue, c'est comme si son altitude diminuait. Ceci fait diminuer Δp ainsi que Δh. Cette variation de Δh est plus forte que lorsque p₀ augmente de 1hPa car 1 hPa à haute altitude correspond à une hauteur d'air plus grande qu'à basse altitude (la densité de l'air est plus faible à haute altitude).
- p₀ et p₁ augmentent de 1 hPa (par exemple si le baromètre fait une erreur systématique de +1) : la variation Δh est de -1,2 mètres. Pour comprendre cela, il suffit de reprendre les deux explications précédentes, d'où la différence 1,2 mètres (-10,2 + 9,0).
- T_a augmente de 1°C : la variation Δh est de +3,8 mètres, car l'air est plus chaud donc moins dense. Il faut donc une hauteur plus grande pour compenser et expliquer la différence de pression.

- ΔT augmente de 0,001 (cette augmentation correspond à une baisse de 1°C pour 1000 mètres) : la variation Δh est de -1,8 mètres : la température de l'air baisse plus rapidement, l'air est plus dense il faut donc une moins grande altitude pour compenser les pressions.

Commentaire des résultats :

L'altitude du Môle est de 1863 mètres. Notre résultat est de 1860 mètres à plus ou moins 10 mètres. Pour pouvoir vraiment tester la valeur de ce résultat, il faudrait réaliser des mesures continues de pression et de température au pied et au sommet de la montagne pour se rendre compte si le résultat change au cours du temps et des mesures.

4) Les mesures au Mont-Blanc

a) Les mesures de de Saussure

Horace-Bénédict de Saussure relate ses mesures barométriques réalisées au sommet du Mont-Blanc le 3 août 1787 dans son ouvrage *Voyage dans les Alpes*¹. Alors qu'il effectue ses mesures au sommet du Mont-Blanc, des mesures simultanées sont réalisées par son fils à Chamonix (au Prieuré à 1052 m d'altitude) et par son collaborateur M. Senebier à Genève (à son cabinet à 401 m d'altitude). De Saussure calcule l'altitude du Mont-Blanc en utilisant différentes formules (les savants de l'époque ne sont pas encore arrivés à une formule qui fasse l'unanimité) et ses résultats varient de 2418 à 2480 toises (soit 4712 à 4833 m). Il considère que la valeur 2450 toises (soit 4775 m) doit être une bonne estimation.

En utilisant ses mesures et les formules barométrique actuelles, nous refaisons ses calculs. Les unités utilisées par de Saussure ne sont plus les nôtres, il faut donc convertir ses résultats.

Unités de longueur : 1 toise = 1,94904 m 1 pied = 0,32484 m 1 pouce = 0,02707 m
 1 ligne = 0,002256 m 1 seizième de ligne = 0,000141 m

Unités de pressions : les hauteurs H du baromètre exprimées en mm de mercure sont converties en Pascal en utilisant la proportionnalité suivante : 760 mm de mercure correspondent à 1013,25 hPa.

Unités de température : de Saussure utilise les degrés Réaumur : $T(^{\circ}C) = \frac{100}{80} T(^{\circ}R)$.

	Unités utilisées par de Saussure				Unités actuelles		
	Hauteur corrigée du baromètre			T	Pression		T
	po	lig	1/16e	°Ré	mm de Hg	hPa	°C
Mont Blanc	16	0	14,4	-2,3	435,2	580,2	-2,9
Chamonix	25	3	5,8	18,4	684,3	912,4	23,0
Genève	27	2	10,85	22,6	736,9	982,5	28,3

Calcul de l'altitude du Mont-Blanc :

Nous ne savons bien sûr rien de l'altitude du Mont-Blanc à l'époque de de Saussure. Nous comparons donc le résultat obtenu avec ses mesures avec la valeur actuelle de 4810 m.

¹ Horace-Bénédict de Saussure, *Voyages dans les Alpes, précédés d'un essai sur l'histoire naturelle des environs de Genève*, tome IV, Neuchâtel, 1796, pp. 187-193.

- Avec les mesures de Chamonix et du Mont-Blanc :

Lieux	Altitudes IGN (m)	Mesures (hPa)	T(°C)	ΔT	Ta
Chamonix	1052	912,4	23	0,00689	10,05
Mont-Blanc	4810	580,2	-2,9		

	Calcul de l'altitude du Môle (m)	Erreur (m)
Modèle 2	4805,1	-4,9
Modèle 3	4802,3	-7,7

- Avec les mesures de Genève et du Mont-Blanc :

Lieux	Altitudes IGN (m)	Mesures (hPa)	T(°C)	ΔT	Ta
Genève	401	982,5	28,3	0,00708	12,7
Mont-Blanc	4810	580,2	-2,9		

	Calcul de l'altitude du Môle (m)	Erreur (m)
Modèle 2	4808,6	-1,4
Modèle 3	4804,0	-6

b) Nos mesures

La mesure de la pression et de la température au sommet du Mont-Blanc a été réalisée le 4 juillet à 7h30. Pour la mesure simultanée à Chamonix, nous comptons utiliser les relevés de pression et de température de la station météorologiques de Chamonix. Mais nous avons appris à notre retour que le capteur de pression avait été supprimé ! Il ne nous reste donc que la mesure simultanée à Genève, qui provient de la station météorologique de l'aéroport de Genève Cointrin.

Lieux	Altitudes IGN (m)	Mesures (hPa)	T(°C)	ΔT	Ta
Genève	420	972,6	20,4	0,00510	9,2
Mont-Blanc	4810	571	-2,0		

	Calcul de l'altitude du Môle (m)	Erreur (m)
Modèle 2	4822,0	12,01
Modèle 3	4818,8	8,81

Nos mesures, réalisées 220 ans après celles de de Saussure, sont donc moins précises que les siennes ! Il y a le problème du capteur de pression (simple montre altimètre) qui n'est pas très précis. Sa résolution est de 1hPa, ce qui correspond à 0,75 mm de mercure. Or un 16e de ligne sur le baromètre de de Saussure est égal à 0,141 mm, ce qui est 5 fois plus précis. Il y a aussi le problème de la mesure de la température sur un sommet de montagne venté. Si au Môle, une erreur de 1°C dans la mesure de la température occasionnait une erreur de 4 m sur l'altitude, pour le Mont-Blanc cela occasionne une erreur d'altitude de 8m. Nous avons effectué notre mesure, en protégeant le capteur dans un sac à dos, ce qui n'était pas suffisant pour obtenir une mesure stable.

CONCLUSION

Nous avons appris que la détermination de l'altitude d'une montagne n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser. Quelque soit la méthode utilisée (géodésie ou barométrie), il y a toujours un grand nombre de choses à prendre en considération et beaucoup de mathématiques. Il y a d'abord le problème de la mesure. En géodésie, il faut aller repérer sur le terrain car tous les points doivent être visibles les uns les autres. En barométrie, il faut escalader le sommet. Cette mesure doit être précise. Cela nécessite de savoir s'y prendre et d'avoir de bons appareils. C'était le cas pour nos

mesures de géodésie, grâce au topographe qui nous a aidé, mais moins pour nos mesures de pression et de température. Mais la mesure ne suffit encore pas. Il faut ensuite avoir une théorie et surtout faire de nombreuses corrections. En géodésie, il faut prendre en compte la sphéricité de la Terre, ce qui nous a surpris et la réfraction de l'atmosphère, que nous ne connaissions pas. En barométrie, il faut prendre en compte la température de l'air. Il est ensuite difficile d'estimer l'erreur sur notre résultat. Avec la méthode géodésique, nous sommes arrivés à une détermination de l'altitude à 3 mètres près. Avec la méthode barométrique à 10 mètres près. Pour être plus précis, il faudrait encore améliorer chaque étape de nos mesures. En géodésie, il faudrait surtout faire des visées plus précises, grâce à une source lumineuse, qui serait plus facile à voir dans le tachéomètre que le pull blanc d'un élève ! En barométrie, il faudrait avoir un capteur de pression plus précis et prendre davantage de temps pour la mesure de température.

Aujourd'hui, la méthode barométrique n'est plus utilisée, elle n'est pas assez précise. La méthode géodésique, lorsqu'elle est faite par des professionnels donnent des résultats à la dizaine de centimètres près (comparés à nos 3 mètres !). Une autre méthode géodésique existe, appelée méthode géométrique de précision. Elle est encore plus précise. Elle n'est possible que le long des routes. A l'aide d'un niveau à lunette horizontal, ils visent deux règles (l'altitude de la première est connue mais pas la seconde). La lecture sur les deux règles permet de déterminer l'altitude de la seconde règle. La méthode se poursuit de proche en proche et à la fin, la précision atteint alors le centimètre !

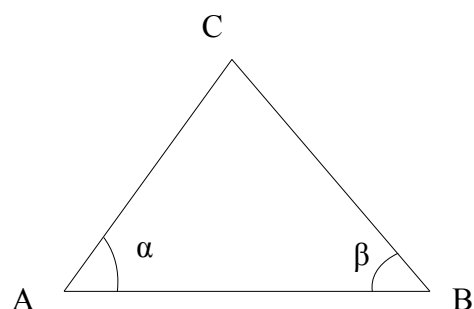
Aujourd'hui, le GPS change complètement la détermination des altitudes. La précision est telle que les scientifiques peuvent suivre des variations très lentes : déplacement des plaques tectoniques, surveillance des volcans, détermination du niveau moyen des mers, etc.

Remerciements:

Nous tenons à remercier Mr Deparis, qui nous a encadré tout au long de ce TPE. Nous remercions aussi Mr Meynet, topographe, qui nous a permis de réaliser les mesures géodésiques.

Annexe A : Quel est l'effet de la longueur de la base de départ dans la précision d'une triangulation

Nous avons le sentiment que pour qu'une triangulation soit précise, il fallait que la longueur de la base de départ soit sensiblement la même que les autres côtés du triangle. Pour le montrer, nous allons calculer les effets d'une faible variation dans les mesures dans le cas de deux triangles, très différents l'un de l'autre. L'un a une base AB de 1km, l'autre de 8 km, alors que les deux autres côtés ont des longueurs de 8km.



Dans un premier temps, connaissant la longueur des trois côtés du triangle, nous calculons les angles α et β avec les formules trigonométriques suivantes :

$$\alpha = \arccos\left(\frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 AC \times AB}\right) \quad \text{et} \quad \beta = \arccos\left(\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 AB \times BC}\right)$$

Ensuite, nous calculons la longueur du côté BC, en faisant légèrement varier la longueur AB et les angles α et β . Nous utilisons la formule suivante : $BC = \frac{AB \times \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Premier triangle (petite base) :

Distance AB (m)	1000
Distance AC (m)	8000
Distance BC (m)	8000
Angle α (°)	86,4
Angle β (°)	86,4

	AB varie de +0,1 m	α varie de +0,1°	β varie de +0,1°
Distance BC (m)	8000,8	8113,5	8113,5

Deuxième triangle (grande base) :

Distance AB (m)	8000
Distance AC (m)	8000
Distance BC (m)	8000
Angle α (°)	60
Angle β (°)	60

	AB varie de +0,1 m	α varie de +0,1°	β varie de +0,1°
Distance BC (m)	8000,1	8016,14	8016,14

C'est essentiellement les variations en angle qui ont une grande importance et leurs effets est beaucoup plus grand lorsque la base est petite que lorsqu'elle a la même longueur que les autres côtés du triangle. Lorsqu'on effectue une triangulation, il est donc nécessaire d'abord une base adaptée aux autres côtés du triangle.

Annexe B : Les instruments scientifiques de H.-B. de Saussure

Le Musée d'Histoire des Sciences de Genève abrite une collection des instruments scientifiques d'Horace Bénédicte de Saussure. Nous avons été le visiter un après midi pour s'imprégner de l'époque de de Saussure et mieux connaître sa vie.



L'entrée du Musée d'Histoire des Sciences de Genève.

Un baromètre portatif. C'est avec cet appareil que de Saussure mesura la pression au sommet du Mont-Blanc.



L'électromètre, pour mesurer la quantité d'électricité présente dans l'air.



L'hygromètre à cheveu, l'invention la plus célèbre de de Saussure. L'humidité de l'air est mesurée grâce au raccourcissement ou à l'élongation d'un cheveu. Il aurait utilisé un cheveu de son épouse !

L'anémomètre, qui est basé sur la résistance au vent d'une plaque métallique maintenue immobile grâce à des poids.



L'équipement pour le Mont-Blanc !

Annexe C : Quelques photos d'ascension

Avant de réaliser l'ascension du Mont-Blanc, nous avons effectué de nombreuses sorties de préparation, d'abord en raquette et en skis de randonnées pendant l'hiver, puis des sorties d'alpinisme en mai et en juin. Ces sorties ont également permis de mesurer la température d'ébullition de l'eau pour différentes pressions, ce qui intéressait un autre groupe d'élèves.



Montée à l'Aiguille du Tour

Sortie à la Bérangère



Mesure de la température d'ébullition au sommet du Buet



Traversée des Crochues

Autre mesure de la température d'ébullition



Au sommet du Mont-Blanc